



Волинський національний університет імені Лесі Українки
Кафедра теорії функцій та методики навчання математики

СИЛАБУС

обов'язкового освітнього компонента

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Рівень вищої освіти	Перший (бакалаврський)
Галузь знань	11 Математика та статистика
Спеціальність	111 Математика
Освітня програма	Математика (редакція 2023 року зі змінами 2025 року)
Форма навчання	Денна
Розробник (викладач)	Харкевич Юрій Іліодорович, кандидат фізико-математичних наук, професор
Контактна інформація	Електронна адреса викладача: kharkevich.juriy@gmail.com Телефон: 099-763-97-54
Семестр, курс	5-6 семестр, III курс
Обсяг освітнього компонента	Загальний обсяг: 7 кредитів / 210 годин. Аудиторних годин: 130; з них: лекцій – 64 год., практичних – 66 год. Самостійної роботи: 66 год.
Форма контролю	Екзамен (5 семестр), екзамен (6 семестр)
Час занять	Тижневих годин: 5 семестр – 3 год; 6 семестр – 4,5 год. Аудиторні заняття проводяться за розкладом: http://94.130.69.82/cgi-bin/timetable.cgi Консультації викладача відповідно затвердженого графіку.
Анотація курсу	«Функціональний аналіз» належить до переліку обов'язкових освітніх компонентів, забезпечує професійний розвиток здобувача та спрямований на формування у майбутніх фахівців цілісного розуміння предмету і методів сучасного функціонального аналізу, узагальнення поняття простору, висвітлення теоретичних питань, пов'язаних із топологічними, метричними, нормованими та гільбертовими просторами, дослідженням лінійних обмежених функціоналів та операторів, визначених на вказаних просторах. Методи, ідеї, термінологія, позначення і стиль функціонального аналізу пронизують більшість розділів математики, поєднуючи її в єдине ціле. Розвиток таких розділів математики, як диференціальні рівняння (звичайні та в частинних похідних), теорія управління, методи обчислень, теорія сигналів і т. і. пов'язаний також з використанням ідей і методів функціонального аналізу.
Предреквізити	Основи теорії множин, що вивчаються в «Дискретній математиці»; курси «Математичний аналіз I» та «Математичний аналіз II», «Аналітична геометрія», «Лінійна алгебра», «Диференціальні рівняння», елементарна математика в обсязі програми повної загальної середньої освіти.

Постреквізити	Застосування результатів навчання функціонального аналізу при вивченні обов'язкових освітніх компонент бакалаврського рівня «Теорія міри та інтеграла Лебега», «Рівняння математичної фізики», «Топологія».
Мета і завдання освітнього компонента	Метою є формування цілісного уявлення про предмет і методи функціонального аналізу; ознайомлення з основними поняттями і задачами загальної теорії неперервних відображень метричних і топологічних просторів; активне оволодіння понятійним апаратом та теоретичними результатами, що стосуються лінійних функціоналів та лінійних операторів у банаховому та гільбертовому просторах; ознайомлення з сучасною проблематикою класичного та прикладного аналізу, з прикладними застосуваннями рядів та перетворень Фур'є, формування таких загальних та спеціальних компетентностей: • здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу (ЗК-1); • здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях (ЗК-2); • знання й розуміння предметної області та професійної діяльності (ЗК-3); • здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями (ЗК-7); • здатність ухвалювати рішення та діяти, дотримуючись принципу неприпустимості корупції та будь-яких інших проявів недоброчесності (ЗК-16); • здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок (СК-3); • здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганних (СК-4); • здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів (СК-8); • здатність зберігати та примножувати традиції волинської математичної наукової школи (СК-11).
Результати навчання	Опанування змісту освітнього компонента «Функціональний аналіз» дозволяє отримати наступні програмні результати навчання: • знати принципи <i>modus ponens</i> (правило виведення логічних висловлювань) та <i>modus tollens</i> (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень (ПРН-3); • розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми (ПРН-4); • розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями (ПРН-10);

	• розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей (ПРН-11); • знати теоретичні основи і застосовувати методи топології, функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь для дослідження динамічних систем (ПРН-16); • знати основи загальної теорії міри та основні властивості інтеграла Лебега, застосовувати їх у теорії функцій, теорії ймовірності та у інших розділах сучасної математики (ПРН-22); • знати і вміти застосовувати основи теорії функцій та методи апроксимації при розв'язуванні практичних задач (ПРН-23); • знати основні події життєвого та творчого шляху видатних культурних та наукових діячів Волині, здобутки волинської математичної спільноти (ПРН-24).
--	--

Структура освітнього компонента

Назви змістових модулів і тем	Усього	Лек.	Практ.	Конс.	Сам. роб.	*Форма контролю/ Бали
Змістовий модуль 1. Метричні простори.						
Тема 1. Поняття метричного простору.	7	2	2	1	2	УО, РЗ/ 5
Тема 2. Збіжність. Відкриті і замкнуті множини.	6	2	2		2	УО, РЗ/ 5
Тема 3. Повні метричні простори.	7	2	2	1	2	УО, РЗ/ 5
Тема 4. Принцип стискуєчих відображень та його застосування.	12	4	4		4	УО, РЗ/ 5
Тема 5. Компактність у метричних просторах.	13	4	4	1	4	УО, РЗ/ 5
Разом за модулем 1	45	14	14	3	14	25
Змістовий модуль 2. Нормовані і лінійні простори.						
Тема 6. Лінійні простори.	8	2	2		4	УО, РЗ/ 5
Тема 7. Опуклі множини і опуклі функціонали.	9	2	2	1	4	УО, РЗ/ 5
Тема 8. Нормовані простори.	13	4	4	1	4	УО, РЗ/ 5
Тема 9. Евклідові простори.	15	4	6	1	4	УО, РЗ/ 10
Разом за модулем 2	45	12	14	3	16	25
ІНДЗ						20
Модульна контрольна робота за ЗМ 1						15
Модульна контрольна робота за ЗМ 2						15
Всього годин / балів за I семестр	90	26	28	6	30	100
Змістовий модуль 3. Лінійні функціонали і лінійні оператори.						
Тема 10. Неперервні лінійні оператори.	6	2	2		2	УО, РЗ/ 2
Тема 11. Неперервні лінійні оператори на нормованих просторах.	7	2	2	1	2	УО, РЗ/ 5
Тема 12. Оборнений оператор. Рівномірна та слабка збіжність. Умови оборотності лінійного оператора.	9	2	2	1	4	УО, РЗ/ 3
Тема 13. Спектр та резольвента лінійного оператора	9	2	2	1	4	УО, РЗ/ 5

Тема 14. Компактні оператори і їх власні числа.	13	4	4	1	4	УО, РЗ/ 5
Разом за модулем 3	44	12	12	4	16	20
Змістовий модуль 4. Простори сумовних функцій.						
Тема 15. Простір L_1 .	6	2	2		2	УО, РЗ/ 5
Тема 16. Простір L_2 .	10	4	4		2	УО, РЗ/ 5
Тема 17. Ортогональні системи функцій в L_2 . Ряди по ортогональних системах.	20	6	6	2	6	УО, РЗ/ 5
Разом за модулем 4	36	12	12	2	10	15
Змістовий модуль 5. Тригонометричні ряди. Перетворення Фур'є.						
Тема 18. Умови збіжності ряду Фур'є. Теорема Фейєра.	14	6	4		4	УО, РЗ/ 5
Тема 19. Інтеграл Фур'є.	13	4	6	1	2	УО, РЗ/ 5
Тема 20. Перетворення Фур'є.	13	4	4	1	4	УО, РЗ/ 5
Разом за модулем 5	40	14	14	2	10	15
ІНДЗ						20
Модульна контрольна робота за ЗМ 3						15
Модульна контрольна робота за ЗМ 4-5						15
Всього годин / балів за II семестр	120	38	38	8	36	100
Всього годин за навчальний рік	210	64	66	14	66	

Форма контролю*: УО – усне опитування, РЗ – розв'язування задач, ІНДЗ – індивідуальне завдання/індивідуальна робота здобувача освіти.

Завдання для самостійного опрацювання

Самостійна робота здобувачів освіти включає:

- Опрацювання лекційного матеріалу – 12 год.

Перевірка здійснюється під час виконання практичних завдань та під час усного опитування.

- Підготовка до практичних занять – 16 год.

Перевірка здійснюється під час практичних занять.

- Вивчення тем, що не розглядаються в курсі лекцій – 12 год.

Перевірка здійснюється під час модульних контрольних заходів і оцінюється відповідною кількістю балів.

- Виконання ІНДЗ – 10 год.

Перевірка здійснюється під час захисту ІНДЗ.

- Систематизація вивченого матеріалу перед екзаменом – 16 год.

Перевірка здійснюється під час екзамену.

Питання для самостійного опрацювання

1. Спряжені простори.
2. Фактор-простір.
3. Теорема Банаха-Штейнгауза для простору операторів.
4. Нормальні, ізометричні та унітарні оператори. Приклад неунітарної ізометрії.
5. Теорема Данфорда про відображення спектрів.
6. Слабкі топології.

Оцінювання

Політика оцінювання та організація контрольних заходів здійснюється згідно з Положенням про поточне та підсумкове оцінювання знань здобувачів освіти Волинського національного університету імені Лесі Українки (<https://cutt.ly/yrNruzhM>).

Оцінювання знань здійснюється за 100-бальною шкалою. Кожен семестр оцінюється незалежно. Оцінки, виражені у балах за 100-бальною шкалою, переводяться в шкалу європейської кредитно-трансферної системи (ЄКТС) та традиційну національну систему оцінювання (лінгвістичну). Оцінка включає в себе поточний контроль (оцінюється робота на парах, вчасне і якісне виконання домашніх завдань, самостійне розв'язання індивідуальних завдань) та підсумковий модульний контроль (письмові модульні контрольні роботи). Максимальна кількість балів, яку може заробити студент під час поточного оцінювання за семестр – 70 балів. Підсумковий модульний контроль за семестр включає в себе оцінки за всі модульні контрольні роботи. Максимальна кількість балів, яку може заробити студент під час модульного контролю за семестр складає 30 балів. Призери студентської математичної олімпіади можуть отримати додаткові (бонусні) бали за правильне розв'язання задач з функціонального аналізу на олімпіаді (проводиться у грудні або у лютому).

Згідно з Положенням про визнання результатів навчання, отриманих у формальній, неформальній та/або інформальній освіті у Волинському національному університеті імені Лесі Українки (<https://cutt.ly/BteZd6Gd>) студенту можуть бути зараховані результати навчання, які отримані у формальній, неформальній та/або інформальній освіті.

У кожному семестрі передбачається виконання індивідуальних завдань. Варіант ІНДЗ включає себе набір задач, що охоплюють одну або кілька близьких тем. ІНДЗ виконуються студентами на основі знань, умінь і навичок, одержаних під час лекційних та практичних занять. Кожен студент виконує два індивідуальні завдання – по одному в кожному семестрі.

Якщо за результатами семестру накопичено не менше 75 балів і студент погоджується із цим результатом, то оцінка за семестр може виставлятися без складання іспиту. В іншому разі студент складає іспит; максимальна кількість балів, яку можна отримати на іспиті – 30 балів. Вони замінюють бали модульного семестрового контролю, поточний семестровий контроль при цьому зберігається. Екзамени проходять у письмовій формі. У кожному екзаменаційному білеті міститься по два теоретичних питання, а також набір задач, вибраних із кожної модульної контрольної роботи відповідного семестру (по 1-2 задачі). Оцінка за семестр у випадку складання іспиту є сумою балів поточного контролю та балів, отриманих під час іспиту.

Критерії поточного оцінювання

При роботі здобувача на практичних заняттях оцінюються: систематичність роботи на практичних заняттях, рівень знань, продемонстрований у відповідях при усному опитуванні, активність при обговоренні питань. За перший та другий змістовні модулі здобувач може отримати максимально 25 балів, за третій – 20 балів, за четвертий та п'ятий змістовні модулі – максимально 15 балів. Разом за роботу на практичних заняттях здобувач може отримати максимально 50 балів в кожному семестрі.

До поточного оцінювання відносяться також бали за ІНДЗ. Оцінювання ІНДЗ здійснюється за 20- бальною шкалою. ІНДЗ подається викладачеві, який читає лекційний курс з даної дисципліни, не пізніше, ніж за 2 тижні до екзамену.

20-18 балів ставиться в тому випадку, коли студент правильно розв'язує всі завдання, повністю описує пояснення ходу розв'язання, допускає лише неточності в оформленні чи помилку в обчисленні.

17-15 балів ставиться тоді, коли студент не повністю дослідив поставлені завдання або допустив деякі неточності (допустив помилки в обчисленнях або виконав 80% завдань.)

14-10 балів ставиться в тому випадку, коли студент не повністю розв'язав задачу або допускає помилки при розв'язанні практичних завдань, але виконано правильно не менше 70% від всіх даних йому завдань.

9-6 бали ставиться, коли студент під час розв'язування пропустив суттєві моменти розв'язання або допустив грубі помилки, виконав не менше 30% від загальної кількості запропонованих йому завдань.

5-1 бали ставиться, коли при підготовці ІНДЗ студент під час роботи показав незнання основних методів розв'язання, допустив грубі помилки, виконав менше 30 % від загальної кількості запропонованих йому завдань.

0 балів ставиться, якщо студент не здав ІНДЗ або жодного завдання не виконав правильно.

Критерії оцінювання модульних контрольних робіт

У кожному семестрі заплановано дві модульні контрольні роботи по 15 балів кожна.

15-14 балів ставиться, якщо студент правильно розв'язав практичні завдання, вміє пояснити методику розв'язання та зміст застосовуваного понятійного апарату і формул. Вміє аргументувати свої думки.

13-12 балів ставиться, якщо студент показує знання методики розв'язання практичних завдань та змісту застосовуваного понятійного апарату і формул. Проте допущені окремі незначні помилки у розв'язанні.

11-9 балів ставиться, якщо студент показує знання методики розв'язання практичних завдань та змісту застосовуваного понятійного апарату і формул. Проте допущені помилки у розв'язанні не дають можливості зробити правильні висновки.

8-6 балів ставиться, якщо студент частково розв'язав практичні завдання, але не спромігся аргументувати свою відповідь, помилився у використанні понятійного апарату та методики розв'язання задачі.

5-3 балів ставиться, якщо студент погано засвоїв основні поняття, не вміє розв'язувати більшість типових задач, допускає суттєві помилки.

2-0 балів ставиться, якщо студент неправильно розв'язав практичні завдання, показав незадовільне знання понятійного апарату, або взагалі нічого не відповів.

Перелік питань до екзамену

1 семестр

1. Поняття метричного простору. Означення і основні приклади.
2. Нерівність Гельдера.
3. Нерівність Мінковського.
4. Неперервні відображення метричних просторів.
5. Граничні точки. Замикання.
6. Збіжність. Щільні підмножини.
7. Відкриті і замкнуті множини.
8. Відкриті і замкнуті множини на прямій.
9. Означення і основні приклади повних метричних просторів.
10. Теорема про вкладені кулі.

11. Принцип стискуючих відображень. Найпростіші застосування принципу стискуючих відображень.
12. Теореми існування та єдиності для диференціальних рівнянь.
13. Застосування принципу стискуючих відображень до інтегральних рівнянь Фредгольма.
14. Застосування принципу стискуючих відображень до інтегральних рівнянь Вольтерра.
15. Поняття компактності.
16. Неперервні відображення компактних просторів. Злічення компактності. Передкомпактні множини.
17. Критерій компактності.
18. Означення лінійного простору. Приклади лінійних просторів.
19. Лінійна залежність та незалежність елементів лінійного простору. Підпростори. Приклади підпросторів.
20. Фактор-простори.
21. Означення лінійного функціонала.
22. Геометричний зміст лінійного функціонала.
23. Опуклі множини і опуклі тіла. Однорідно-опуклі функціонали.
24. Функціонал Міньковського.
25. Теорема Хана-Банаха.
26. Теорема Хана-Банаха (комплексний варіант).
27. Означення і приклади нормованих просторів.
28. Підпростори нормованих просторів.
29. Евклідові простори: означення, приклади.
30. Ортогональні бази. Теорема про ортогоналізацію.
31. Нерівність Бесселя. Замкнуті ортогональні системи.
32. Повні евклідові простори. Теорема Ріса-Фішера.
33. Гільбертовий простір. Теорема про ізоморфізм.
34. Характеристична властивість евклідових просторів.
35. Комплексні евклідові простори.

2 семестр

1. Неперервні лінійні функціонали в топологічних лінійних просторах.
2. Лінійні функціонали на нормованих просторах.
3. Лінійні функціонали в зчисленно-нормованих просторах.
4. Теорема Хана-Банаха в нормованому просторі.
5. Означення і приклади лінійних операторів.
6. Неперервні лінійні оператори.
7. Обмежені лінійні оператори.
8. Обернений оператор. Оборотноість.
9. Рівномірна та слабка збіжність.
10. Спряжені оператори.
11. Спряжений оператор в евклідовому просторі. Самоспряжені оператори.
12. Власні значення і власні елементи оператора.
13. Резольвента лінійного оператора. Спектр. Класифікація точок спектра.
14. Означення і приклади компактних операторів.
15. Основні властивості компактних операторів.
16. Компактні оператори в гільбертовому просторі.
17. Означення і основні властивості простору L_1 .
18. Скрізь щільні множини в L_1 .
19. Означення і основні властивості простору L_2 . Випадок нескінченної міри.

20. Скрізь щільні множини в L_2 . Теорема про ізоморфізм.
21. Тригонометрична система. Тригонометричний ряд Фур'є.
22. Ряд Фур'є в комплексній формі.
23. Многочлени Лежандра.
24. Функція Ерміта.
25. Ортогональні многочлени з дискретною вагою.
26. Достатні умови збіжності ряду Фур'є в точці.
27. Умови рівномірної збіжності ряду Фур'є.
28. Теорема Фейєра.
29. Повнота тригонометричної системи. Теорема Вейєрштрасса.
30. Основна теорема про зображення функції за допомогою інтеграла Фур'є.
31. Інтеграл Фур'є в комплексній формі.
32. Перетворення Фур'є і формула обернення.
33. Основні властивості перетворення Фур'є.
34. Перетворення Фур'є і згортка функцій.

Шкала оцінювання знань здобувачів освіти з формою контролю – екзамен

Оцінка в балах	Лінгвістична оцінка	Оцінка за шкалою ECTS	
		оцінка	пояснення
90–100	Відмінно	A	відмінне виконання
82–89	Дуже добре	B	вище середнього рівня
75–81	Добре	C	загалом хороша робота
67–74	Задовільно	D	непогано
60–66	Достатньо	E	виконання відповідає мінімальним критеріям
1–59	Незадовільно	Fx	необхідне перескладання

Вирішення конфліктних ситуацій

Будь-яка конфліктна ситуація, яка виникає в учасників освітнього процесу вирішується згідно з Положенням про порядок і процедури вирішення конфліктних ситуацій у ВНУ імені Лесі Українки (<https://cutt.ly/SteZfYIg>).

Політика викладача щодо здобувача освіти

Усі учасники освітнього процесу повинні дотримуватись вимог чинного законодавства України, Статуту (<https://vnu.edu.ua/uk/statut-snu-imeni-lesi-ukrayinki>) і Правил внутрішнього розпорядку ВНУ імені Лесі Українки (<https://cutt.ly/VteZfCaL>), загальноприйнятих моральних принципів, правил поведінки та корпоративної культури; підтримувати атмосферу доброзичливості, відповідальності, порядності й толерантності. Атмосфера на заняттях повинна бути творчою, відкритою до конструктивної критики. Недопустимі запізнення на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття; списування. Відвідування занять є обов'язковим. За об'єктивних причин (наприклад, хвороба, міжнародне стажування, навчання в рамках програм академічної мобільності) навчання може відбуватися в онлайн формі за погодженням із викладачем.

Політика щодо академічної доброчесності

Кожен студент повинен ознайомитися і слідувати Кодексу академічної доброчесності Волинського національного університету імені Лесі Українки (<https://cutt.ly/iteZgigI>), дотримуватись етичних принципів та визначених законом правил, якими мають керуватися учасники освітнього процесу під час навчання, викладання та провадження наукової діяльності.

Дотримання академічної доброчесності здобувачами передбачає: самостійне виконання навчальних завдань, завдань поточного та підсумкового контролю результатів навчання (для осіб з особливими освітніми потребами ця вимога застосовується з урахуванням їхніх індивідуальних потреб і можливостей); посилення на джерела інформації у разі запозичень ідей, тверджень, відомостей; дотримання норм законодавства про авторське право.

Під час оцінювання результатів навчання студенти не користуються забороненими засобами (мобільний телефон, планшет, конспект, навчальна література, інші джерела інформації, в тому числі Інтернет-ресурси), самостійно виконують запропоновані завдання.

Політика щодо дедлайнів та перескладання

Якщо здобувач вищої освіти був відсутній на заняттях з будь-якої причини, він/вона вивчають теоретичний матеріал самостійно використовуючи навчальні посібники, конспекти лекцій, виконують всі завдання для аудиторних занять, всі домашні завдання. Прозвітуватися про виконання завдань можна під час консультацій, одночасно при цьому з'ясувати незрозумілі моменти, задати запитання викладачу.

Перескладання модульних контрольних робіт не допускається. Індивідуальні завдання, які здаються із порушенням термінів без поважних причин, оцінюються на нижчу оцінку (бали будуть знижені на 10%).

Опитування

По завершенню курсу студентам буде надано анкету-оцінку з метою оцінки якості курсу.

Рекомендована література

Основна література

1. Коренков М.Є., Харкевич Ю.І. Основи функціонального аналізу: навч. посіб. Луцьк: Волин. нац. ун-т імені Лесі Українки, 2021. 247 с.
2. Коренков М.Є., Харкевич Ю.І. Теорія міри та інтеграла (теореми і вправи): навч. посіб. Луцьк: Волин. нац. ун-т імені Лесі Українки, 2022. 172 с.
3. Колмогоров А.Н., Фомін С.В. Елементи теорії функцій і функціонального К.: Вища школа, 1974. 455 с.
4. Березанський Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель В.Г. Функціональний аналіз. Львів, Видавець І. Є. Чижиков, 2014. 560 с
5. Збірник задач з функціонального аналізу. Частина І. Видання друге, виправлене і доповнене. / Укладачі В. Б. Брайман, О. Ю. Константінов, О. Г. Кукуш, Ю. С. Мішура, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський. К.: 2022.
6. Анікушин А.В., Семенов В.В. Збірник задач з функціонального аналізу. К.: Видавничополіграфічний центр "Київський університет", 2017. 64 с.

Додаткова література

1. Гарасим Я.С., Недашковська А.М., Остудін Б.А. Методи розв'язування типових задач функціонального аналізу: Методичний посібник для студентів. Львів: Простір М, 2015. 72 с.
2. Городній М.Ф., Константинов О.Ю., Нестеренко О.Н., Чайковський А.В. Навчальні завдання до практичних занять з функціонального аналізу. К.: ВПЦ «Київський університет», 2006. 103 с.
3. Kadets V. A Course in Functional Analysis and Measure Theory. Springer, 2018. 553 p
4. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. Cambridge University Press. 2004, 740 p.

Погоджено

Гарант освітньо-професійної програми



Волошина Т.В.

Затверджено на засіданні кафедри теорії функцій та методики навчання математики
протокол № 2 від 17 вересня 2025 р.

Завідувач кафедри



Гембарська С.Б.

